

## Exemple

Soit le programme linéaire (P) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 500 x_1 + 300 x_2 \\ 20 x_1 + 10 x_2 \leq 2000 \\ 10 x_1 + 45 x_2 \leq 5400 \\ 40 x_1 + 30 x_2 \leq 4800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

**1<sup>ère</sup> étape :** Mettre le P.L sous sa forme standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 500 x_1 + 300 x_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3 \\ 20 x_1 + 10 x_2 + 1 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3 = 2000 \\ 10 x_1 + 45 x_2 + 0 e_1 + 1 e_2 + 0 e_3 = 5400 \\ 40 x_1 + 30 x_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 1 e_3 = 4800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 ; e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

**2<sup>ème</sup> étape :** Solution de base initiale :

$$\text{HB} : x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\text{B} : e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 0$$

$$\text{Z} = 0^{\text{Dh}}$$

## Exemple

**TAB 1 :**

↓ V.E

→ V.

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés	Rés/Coeff
x1	1	1/2	1/20	0	0	100	<del>100/(1/2) = 200</del>
e2	0	40	-1/2	1	0	4400	<del>4400/40 = 110</del>
e3	0	10	-2	0	1	800	<del>800/10 = 80</del>
Z <sub>k</sub>	0	50	-25	0	0	Z = -5000	

C'est la ligne du **Pivot** qui correspond à  $V.E \cap V.S$  ici c'est **10**

- $V.E$  qui correspond au **Max** de  $Z \{ 0 : 50 : -25 : 0 : 0 \}$  ici le Max = **50**
- $V.S$  qui correspond au **Min** de  $\text{Rés/Coeff} \{ 200 : 110 : 80 \}$  ici le Min = **80**

Comment on a arriver à faire ce Calcul : c'est simple 😊 regardez :

1. D'abord x1 va entrer comme base alors il va remplacer la variable Sortante qui correspond à e1

## Exemple

**TAB 1 :**

↓ V.E

→ V.

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés	Rés/Coeff
x1	1	1/2	1/20	0	0	100	<del>100/(1/2) = 200</del>
e2	0	40	-1/2	1	0	4400	<del>4400/40 = 110</del>
e3	0	10	-2	0	1	800	<del>800/10 = 80</del>
Z <sub>k</sub>	0	50	-25	0	0	Z = -5000	

C'est la ligne du **Pivot** qui correspond à  $V.E \cap V.S$  ici c'est **10**

- $V.E$  qui correspond au **Max** de  $Z \{ 0 : 50 : -25 : 0 : 0 \}$  ici le Max = **50**
- $V.S$  qui correspond au **Min** de  $\text{Rés/Coeff} \{ 200 : 110 : 80 \}$  ici le Min = **80**

Comment on a arriver à faire ce Calcul : c'est simple 😊 regardez :

1. D'abord x1 va entrer comme base alors il va remplacer la variable Sortante qui correspond à e1

## Exemple

Donc :

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés	Rés/Coeff
x1	1						
e2	0						
e3	0						
Z <sub>k</sub>	0						

2. Ensuite, on fait les calculs correspondant à la ligne du **Pivot** Comme indique les tableau ci-dessous : à savoir :  
*Nouveau valeur* = *Valeur* (Ancien ligne du pivot) / **Pivot**

Donc :

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	10/20	1/20	0/20	0/20	2000/20
e2	0					
e3	0					
Z <sub>k</sub>	0					

càd →

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	1/2	1/20	0	0	100
e2	0					
e3	0					
Z <sub>k</sub>	0					



# Exemple


En fin, on complète le tableau on utilisant la règle de pivotage à savoir

: 
$$\text{Nouvelle valeur} = \text{Ancien Valeur} - \frac{\text{V. correspond (V.E)} * \text{V. correspond (V.S)}}{\text{Pivot}}$$

**Exemple** : pour l'ancien valeur du tableau 0 : 30


Sa Valeur correspond (V.E) = 40

Sa Valeur correspond (V.S) = 10



V.E

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés	Rés/Coeff
e1		10					
e2							
e3	40	30					
Z <sub>k</sub>							



V.S

# Exemple

**Donc : maintenant** si vous avez compris, on va compléter le tableau :

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
<b>x1</b>	<b>1</b>	<b>1/2</b>	<b>1/20</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>100</b>
<b>e2</b>	<b>0</b>	$45 - \frac{(10)(10)}{20}$	$0 - \frac{(10)(1)}{20}$	$1 - \frac{(10)(0)}{20}$	$0 - \frac{(10)(0)}{20}$	$5400 - \frac{(10)(2000)}{20}$
<b>e3</b>	<b>0</b>	$30 - \frac{(40)(10)}{20}$	$0 - \frac{(40)(1)}{20}$	$0 - \frac{(40)(0)}{20}$	$1 - \frac{(40)(0)}{20}$	$4800 - \frac{(40)(2000)}{20}$
<b>Z<sub>k</sub></b>	<b>0</b>	$300 - \frac{(500)(10)}{20}$	$0 - \frac{(500)(1)}{20}$	$0 - \frac{(500)(0)}{20}$	$0 - \frac{(500)(0)}{20}$	$0 - \frac{(500)(2000)}{20}$

*Alors :*

## Exemple

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	1/2	1/20	0	0	100
e2	0	40	-1/2	1	0	4400
e3	0	10	-2	0	1	800
Z <sub>k</sub>	0	50	-25	0	0	Z= -5000

# Exemple

**Remarque :** Concentrez vous sur les valeurs de  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ , qui ce que vous remarquez ?

Base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	Rés
$x_1$	1		1/20	0	0	
$e_2$	0		-1/2	1	0	
$e_3$	0		-2	0	1	
$Z_k$	0		-25	0	0	

Dans la base, il n'y a pas de  $e_1$  c'est pourquoi vous remarquez qu'il y a un changement dans ces valeurs anciens ;

Alors que  $e_2$  et  $e_3$  sont tjrs dans la base, donc ils ont gardé les anciennes valeurs autant que base.

*La prochaine fois essayer de distinguer les variables qui sont de la base pour ne pas faire des calculs inutiles.*

**Càd :**

Tu dois procéder comme suit :

Base	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	Rés
$x_1$	1	1/2	1/20	0	0	100
$e_2$	0	$45 - \frac{(10)(10)}{20}$	$0 - \frac{(10)(1)}{20}$	1	0	$5400 - \frac{(10)(2000)}{20}$
$e_3$	0	$30 - \frac{(40)(10)}{20}$	$0 - \frac{(40)(1)}{20}$	0	1	$4800 - \frac{(40)(2000)}{20}$
$Z_k$	0	$300 - \frac{(500)(10)}{20}$	$0 - \frac{(500)(1)}{20}$	0	0	$0 - \frac{(500)(2000)}{20}$

# Exemple

*Alors* : Situation initial du **TAB 1** :

**HB** :  $x_2=0, e_1=0$

**B** :  $x_1=0, e_2=4400, e_3=800$

**Z** =  $|-5000| = 5000^{Dh}$

**TAB 2** :

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	0	////	0	////	60
e2	0	0	////	1	////	1200
x2	0	1	-1/5	0	1/10	80
Z <sub>k</sub>	0	0	-15	0	-5	Z = -5400

■ *Voila comment on a fait ce calcul ?*

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	0	////	0	////	$100 - \frac{(1/2)(800)}{10}$
e2	0	0	////	1	////	$4400 - \frac{(40)(800)}{10}$
x2	0	1	-2/10	0	1/10	800/10
Z <sub>k</sub>	0	0	$-25 - \frac{(50)(-2)}{10}$	0	$0 - \frac{(50)(1)}{10}$	$-5000 - \frac{(50)(800)}{10}$

# Exemple

La solution de base optimale primale est :

$$\text{HB} : e_1 = 0, e_3 = 0$$

$$\text{B} : x_1 = 60, x_2 = 80, e_2 = 1200$$

$$\text{Zmax} = |-5400| = 5400^{\text{Dh}}$$

Ils sont nuls car ils ne sont pas dans la colonne de Base

## Interprétation économique de la solution optimale primale:

- Pour réaliser une Marge bénéficiaire Max de  $5400^{\text{Dh}}$ , on doit produire et vendre **60** unité de Bien **A** et **80** Unités de Bien **B** avec *plein emploi* en facteurs **F1** et **F3** et *sous-emploi* de **1200** de **F2**.

# Exemple

Soit le même programme linéaire (**P**) ou encore **programme primale** :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max } z = 500 x_1 + 300 x_2 & \\ 20 x_1 + 10 x_2 \leq 2000 & \text{(F1)} \\ 10 x_1 + 45 x_2 \leq 5400 & \text{(F2)} \\ 40 x_1 + 30 x_2 \leq 4800 & \text{(F3)} \\ \text{Avec } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

## Remarque :

1.  $\text{Max } z = 500 x_1 + 300 x_2$  est dite *fonction économique primale*
2.  $x_1, x_2, e_1, e_2, e_3$  sont dites des variables *primales*
3. les contraintes de (**P**) : (1), (2) et (3) sont dites contraintes *primales*

Le dual (**P'**) du primal (**P**) s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } Z' = 2000 y_1 + 5400 y_2 + 4800 y_3 & \\ 20 y_1 + 10 y_2 + 40 y_3 \geq 500 & (1') \\ 10 y_1 + 45 y_2 + 30 y_3 \geq 300 & (2') \\ \text{Avec } y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 & \end{array} \right.$$

# Exemple

## Remarque :

4.  $\text{Min } Z' = 2000 y_1 + 5400 y_2 + 4800 y_3$  est dit *Objectif dual* ;
5.  $y_1, y_2, y_3$  sont dites des variables *duales*
6. les contraintes de  $(P')$  :  $(1'), (2')$  sont dites contraintes *duales*.

## Problème :

On cherche maintenant *la solution optimale duale*  $\bar{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  à partir de la résolution simplexe du primal '*ce qu'on a déjà fait*'

**1<sup>ère</sup> étape :** écrivons la forme standard du dual  $(P')$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } Z' = 2000 y_1 + 5400 y_2 + 4800 y_3 + e_1' + e_2' \\ \quad 20 y_1 + 10 y_2 + 40 y_3 - e_1' = 500 \quad (1') \\ \quad 10 y_1 + 45 y_2 + 30 y_3 - e_2' = 300 \quad (2') \\ \text{Avec } y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, e_1' \geq 0, e_2' \geq 0 \end{array} \right.$$

A partir du dernier tableau simplexe primal on peut avoir le tableau de dualité permettant la déduction de la solution duale.



## Exemple

Base	x1	x2	e1	e2	e3	Rés
x1	1	0	////	0	////	60
e2	0	0	////	1	////	1200
x2	0	1	-1/5	0	1/10	80
Z <sub>k</sub>	0	0	-15	0	-5	Z = -5400

Primal	x1	x2	e1	e2	e3
Dual	e1	e2	y1	y2	y3
Valorisation Marginale des facteurs de P <sup>on</sup> primale	0	0	15	0	5

Ça devient, On utilisant les valeurs absolues

**Conclusion :**

- La solution optimale duale est  $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (15^{DH}, 0^{DH}, 5^{DH})$   
 Avec :  $Z^*_{\min} = (2000 * 15^{DH}) + (5400 * 0^{DH}) + (4800 * 5^{DH}) = 5400^{DH}$   
 (On a utilisé la relation :  $\text{Min } Z' = \underline{2000} y_1 + \underline{5400} y_2 + \underline{4800} y_3$ )  
 et on remarque que  $Z^*_{\min} = Z_{\max}$

**Interprétation économique de la solution optimale duale en tant que valorisation marginale des facteurs de P<sup>o</sup> primale :**

- $y_1^* = 15^{DH}$ , valorisation marginale de facteur de P<sup>o</sup> : 'F1' ; c'ad si on augmente notre disponibilité en facteur de P<sup>o</sup> primale 'F1' d'une unité, notre Marge bénéficiaire Max **5400** augmente de  $15^{DH}$  et inversement ;
- $y_2^* = 0^{DH}$ , valorisation marginale de facteur de P<sup>o</sup> : 'F2' qui est sous-employé de **1200** unités ;
- $y_3^* = 5^{DH}$ , valorisation marginale de facteur de P<sup>o</sup> : 'F3' ; c'ad si on augmente notre disponibilité en facteur de P<sup>o</sup> primale 'F3' d'une unité, notre Marge bénéficiaire Max **5400** augmente de  $5^{DH}$  et inversement